ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2017, № 3-4

УДК 517.929

А.В. Шатырко[1], Й. Диблик[2], Д.Я. Хусаинов[1], Я. Баштинец[2]
[1] Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина
ул. Владимирская, 64, г. Киев, 01033,
[2] Брненский технический университет, Центрально-Европейский Технический Институт, Республика Чехия
656/123, ул. Пуркинова, г. Брно, 61200

СХОДИМОСТЬ ПРОЦЕССОВ НЕЙРОДИНАМИКИ В МОДЕЛИ ХОПФИЛДА

A.V. Shatyrko[1], J. Diblik[2], D.Ya. Khusainov[1], J. Bashtinec[2]
[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
60, Volodymyrska str., Kyiv, 01033
[2] Brno University of Technology, CEITEC - Central European Institute of Technology, Czech Republic
656/123, Purkynova str., Brno, 61200

THE CONVERGENCE OF NEURODYNAMICS PROCESSES IN THE HOPFIELD MODEL

Рассматриваются математические модели динамики нейронной сети, представленные системами обыкновенных дифференциальных уравнений, а также дифференциальных уравнений с запаздыванием с выделенной асимптотически устойчивой линейной частью диагонального вида. С использованием прямого метода Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости. Результаты сформулированы в виде матричных алгебраических неравенств.

Ключевые слова: нейросеть, устойчивость, метод Ляпунова, запаздывание аргумента.

Mathematical models of the dynamics of a neural network, which are represented by systems of ordinary differential equations, as well as differential equations with time-delay argument and the distinguished asymptotically stable linear part are considered. With the using of the direct Lyapunov method, sufficient conditions for asymptotic stability are obtained and exponential estimates of the solutions decay are constructed. The results are formulated in the form of matrix algebraic inequalities.

Key words: neuronet, stability, Lyapunov's method, time-delay argument.

Введение

При разработке компьютеров возникли идеи их аналогов с работой головного мозга человека. Как отмечено в [1], «искусственный интеллект можно определить, как свойство цифровой вычислительной машины или сотни нейроподобных элементов реагировать на информацию, поступающую на ее входные устройства, почти так же, как реагирует в тех же информационных условиях конкретный человек». В 1943 г. Уоррен Мак-Каллок и Уолтер Питтс [2] сделали предположение о том, что нервные клетки можно рассматривать, как логические элементы, а систему клеток с их соединением, как некоторое логическое выражение. И, таким образом, из совокупности таких элементов можно создать аппарат, моделирующий достаточно сложные процессы. Этим же ученым принадлежит определение «нейронные сети» [2,3]. В работе рассматриваются нейронные сети Хопфилда с обратной связью [4-7]. Их динамика описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Проводится исследование устойчивости положения равновесия.

Сеть Хопфилда состоит из множества нейронов, формирующих систему с множеством обратных связей. Количество обратных связей равно количеству нейронов. Выход каждого нейрона замыкается через элемент единичной задержки на все остальные нейроны сети. И нейрон этой сети не имеет обратных связей с самим собой.

Основные результаты. Системы без запаздывания

В настоящей работе будем рассматривать модели Хопфилда, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} F_j(x_j(t)), \; i = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Здесь $a_k > 0$, $k = \overline{1,n}$ постоянные, ω_{ij} – весовые коэффициенты, функции $F_l(0) = 0$, непрерывные и удовлетворяют условию «подлинейного роста»

$$F_j(x_j)[k_j x_j - F_j(x_j)] > 0, \; j = \overline{1,n} \tag{2}$$

Исследование устойчивости нулевого положения равновесия будем проводить с использованием второго метода Ляпунова. В качестве функции Ляпунова выберем

$$V(x_1, x_2,..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} h_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^{x_i} F_i(s_i) ds_i, \; h_i > 0, \; \beta_i > 0, \; i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Введем следующие обозначения

$$\overline{h}_{\max} = \max_{i=\overline{1,n}} \{h_i + \beta_i k_i / 2\}, \; h_{\min} = \min_{i=\overline{1,n}} \{h_i\}. \tag{4}$$

$$(x(t), F(x(t)))^T = (x_1(t),..., x_n(t), F_1(x_1(t)),..., F_n(x_n(t))^T,$$

$$S(h,\beta,r) = \begin{bmatrix} S_{11} & -(S_{12}^1 - S_{12}^2 - S_{12}^3) \\ -(S_{12}^1 - S_{12}^2 - S_{12}^3)^T & -S_{22}^1 + S_{22}^2 \end{bmatrix}, \; S_{11} = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2a_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 2a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$S_{12}^1(\beta) = \begin{bmatrix} a_1\beta_1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2\beta_2/2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_n\beta_n/2 \end{bmatrix}, \quad S_{12}^2(h) = \begin{bmatrix} h_1\omega_{11} & h_1\omega_{12} & \dots & h_1\omega_{1n} \\ h_2\omega_{21} & h_2\omega_{22} & \dots & h_2\omega_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ h_n\omega_{n1} & h_n\omega_{n2} & \dots & h_n\omega_{nn} \end{bmatrix},$$

$$S_{12}^3(r) = \begin{bmatrix} k_1r_1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2r_2/2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & k_nr_n/2 \end{bmatrix}, \; S_{22}^2(r) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$S_{22}^1(\beta) = \begin{bmatrix} \beta_1\omega_{11} & (\beta_1\omega_{12} + \beta_2\omega_{21})/2 & \dots & (\beta_1\omega_{1n} + \beta_n\omega_{n1})/2 \\ (\beta_1\omega_{12} + \beta_2\omega_{21})/2 & \beta_2\omega_{22} & \dots & (\beta_2\omega_{2n} + \beta_n\omega_{n2})/2 \\ . & . & \dots & . \\ (\beta_1\omega_{1n} + \beta_n\omega_{n1})/2 & (\beta_2\omega_{2n} + \beta_n\omega_{n2})/2 & \dots & \beta_n\omega_{nn} \end{bmatrix},$$

Имеют место следующие условия асимптотической устойчивости.

Теорема 1. Пусть существуют постоянные $h_i > 0$, $\beta_i > 0$, $r_i > 0 \; i = \overline{1,n}$, при которых матрица $S(h,\beta,r)$ будет положительно определенной. Тогда нулевое положение равновесия системы (1) является глобально асимптотически устойчивым.

Доказательство. Как следует из зависимости (3), функция $V(x_1, x_2,..., x_n)$ является положительно определенной и для нее справедливы следующие двусторонние оценки

$$h_{\min}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \le V(x_1,x_2,...,x_n)\le \bar{h}_{\max}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \ .$$

Полная производная выбранной функции Ляпунова (3) в силу системы (1) имеет вид

$$\frac{d}{dt}V(x_1,x_2,...,x_n)=2\sum_{i=1}^{n}h_i x_i(t)\left[-a_i x_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}F_j(x_j(t))\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\beta_i F_i\left(x_i(t)\right)\left[-a_i x_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}F_j(x_j(t))\right].$$

Перепишем ее в виде

$$\frac{d}{dt}V(x_1,x_2,...,x_n)=-2\sum_{i=1}^{n}h_i a_i x_i^2(t)-\sum_{i=1}\beta_i a_i x_i(t)F_i(x_i(t))+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[2h_i\omega_{ij}x_i(t)F_j(x_j(t))+\beta_i\omega_{ij}F_i(x_i(t))F_j(x_j(t))].$$

Используя обозначения (5), получаем, что полная производная функции Ляпунова в силу системы будет иметь вид квадратичной формы. Используем условие «подлинейного роста» (2). Запишем

$$\frac{d}{dt}V(x_1,x_2,...,x_n)=-2\sum_{i=1}^{n}h_i a_i x_i^2(t)-\sum_{i=1}\beta_i a_i x_i(t)F_i(x_i(t))+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[2h_i\omega_{ij}x_i(t)F_j(x_j(t))+\beta_i\omega_{ij}F_i(x_i(t))F_j(x_j(t))]-\sum_{i=1}^{n}r_i F_i(x_i(t))[k_i x_i(t)-F_i(x_i(t))]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}r_i F_i(x_i(t))[k_i x_i(t)-F_i(x_i(t))].$$

Отсюда получаем

$$\frac{d}{dt}V(x_1,x_2,...,x_n)\le$$

$$\le -(x(t),F(x(t)))\begin{bmatrix} S_{11} & -(S_{12}^1(\beta)-S_{12}^2(h)-S_{12}^3(r)) \\ -(S_{12}^1(\beta)-S_{12}^2(h)-S_{12}^3(r))^T & -\left(S_{22}^1(\beta)-S_{22}^2(r)\right)\end{bmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ F(x(t))\end{pmatrix}.$$

И, если матрица $S(h,\beta,\lambda)$ будет положительно определенной, то полная производная функции Ляпунова в силу системы (1) будет отрицательно определенной. Следовательно, нулевое решение системы (1) будет глобально асимптотически устойчиво.

Системы с запаздыванием

Далее будем рассматривать нейронные сети, динамика которых описывается системами с запаздыванием.

$$\dot{x}_i(t)=-a_i x_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}F_j(x_j(t-\tau_j)),\ \tau_j>0,\ i=\overline{1,n}. \qquad (6)$$

Скалярные функции $F_j(x_j)$ также удовлетворяют условию «подлинейного роста» (2). При исследовании будем использовать прямой метод Ляпунова с функционалом Ляпунова-Красовского вида

$$V[x_1(t),\ldots,x_n(t)]=\sum_{i=1}^{n}h_i x_i^2(t)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\int_0^{x_i(t)}F_i(s_i)ds_i+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int_{t-\tau_i}^{t}F_i^2(x_i(\xi_i))d\xi_i\ , \qquad (7)$$

$$\beta_i > 0\,,\ \gamma_i > 0\,,\ i = \overline{1,n}\,.$$

Обозначим

$$z^T(t) = (x(t), F(x(t)), F(x(t-\tau)))^T =$$
$$= (x_1(t),...,x_n(t), F_1(x_1(t)),...,F_n(x_n(t)), F_1(x_1(t-\tau_1)),...,F_n(x_n(t-\tau_n)))^T\,,$$

$$S_n[h,\beta,\gamma,r] = \begin{bmatrix} S_n^{11} & S_n^{12} & S_n^{13} \\ (S_n^{12})^T & S_n^{22} & S_n^{23} \\ (S_n^{3})^T & (S_n^{23})^T & S_n^{33} \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

$$S_n^{11}[h,\beta,\gamma] = \begin{bmatrix} 2a_1h_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2a_2h_2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 2a_nh_n \end{bmatrix},$$

$$S_n^{12}[h,\beta,r] = \begin{bmatrix} (a_1\beta_1 - k_1r_1)/2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & (a_2\beta_2 - k_2r_2)/2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & (a_n\beta_n - k_nr_n)/2 \end{bmatrix},$$

$$S_n^{13}[h] = \begin{bmatrix} -h_1\omega_{11} & -h_1\omega_{12} & ... & -h_n\omega_{1n} \\ -h_2\omega_{21} & -h_2\omega_{22} & ... & -h_n\omega_{2n} \\ . & . & ... & . \\ -h_n\omega_{n1} & -h_2\omega_{n2} & ... & -h_n\omega_{nn} \end{bmatrix}, \qquad S_n^{22}[\gamma] = \begin{bmatrix} -\gamma_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & -\gamma_n \end{bmatrix},$$

$$S_n^{23}[\beta] = \begin{bmatrix} -\beta_1\omega_{11}/2 & -\beta_1\omega_{12}/2 & ... & -\beta_1\omega_{12}/2 \\ -\beta_2\omega_{21}/2 & -\beta_2\omega_{22}/2 & ... & -\beta_2\omega_{2n}/2 \\ . & . & ... & . \\ -\beta_n\omega_{n1}/2 & -\beta_n\omega_{n2}/2 & ... & -\beta_n\omega_{nn}/2 \end{bmatrix}, \qquad S_n^{33}[\gamma] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \gamma_2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & \gamma_n \end{bmatrix}.$$

Имеют место следующие условия асимптотической устойчивости.

Теорема 2. Если существуют параметры $h_i > 0$, $\beta_i > 0$, $r_i > 0$, $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, при которых матрица $S_n[h,\beta,r,\gamma]$ положительно определенная, то нулевое положение равновесие системы с запаздыванием (6) глобально асимптотически устойчиво.

Доказательство. Для функционала (7) справедливы двусторонние неравенства

$$h_{\min}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) \le V[x_1(t),\dots,x_n(t)] \le \bar{h}_{\max}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\,.$$

Полная производная функционала (7) в силу системы (6) имеет вид

$$\frac{d}{dt}V[x_1(t),\dots,x_n(t)] = 2\sum_{i=1}^{n} h_i x_i(t)[-a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}F_j(x_j(t-\tau_j))] +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\beta_i F_i(x_i(t))[-a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}F_j(x_j(t-\tau_j))] + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i[F_i^2(x_i(t)) - F_i^2(x_i(t-\tau_i))]\,.$$

Перепишем полученное выражение в виде

$$\frac{d}{dt}V[x_1(t),\dots,x_n(t)] = -\sum_{i=1}^{n} 2a_i h_i x_i^2(t) - \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i x_i(t) F_i(x_i(t)) + 2\sum_{i=1}^{n} h_i x_i(t)[\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} F_j(x_j(t-\tau_j))] +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \beta_i F_i(x_i(t-\tau_i))[\sum_{j-1}^{n} \omega_{ij} F_j(x_j(t-\tau_j))] + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_i^2(x_i(t)) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_i^2(x_i(t-\tau_i)).$$

И, воспользовавшись обозначениями (8), преобразуем правую часть полученного выражения в виде квадратичной формы с определенной добавкой

$$\frac{d}{dt}V[x_1(t),\dots,x_n(t)] = -z^T(t) S_n[h,\beta,\gamma,r] z(t) - \sum_{i=1}^{n} r_i F(x_i(t))[k_i x_i(t) - F_i(x_i(t))],$$

где $r_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ произвольные положительные постоянные. Учитывая условие (2), окончательно получаем оценку

$$\frac{d}{dt}V[x_1(t),\dots,x_n(t)] \le -z^T(t) S_n[h,\beta,\gamma,r] z(t).$$

И если матрица $S_n[h,\beta,\gamma,r]$ положительно определенная, то нулевое решение систем глобально асимптотически устойчиво.

Альтернативой методу функционалов Ляпунова-Красовского [8] для уравнений с запаздыванием является метод конечномерных функций Ляпунова с условием Б.С. Разумихина [9]. Он имеет свои преимущества и недостатки и дополняет метод функционалов. В этом методе есть два подхода. Первый позволяет получать условия устойчивости, равномерные по запаздыванию. Второй позволяет получать условия устойчивости, учитывающие величину запаздывания. Если метод функционалов Ляпунова-Красовского рассматривает отрезки траекторий, как точки в функциональном пространстве, и позволяет непосредственно получать оценки сходимости решений, то для получения оценок сходимости решений методом функций Ляпунова надо использовать неавтономную функцию Ляпунова, «сжимаемость поверхности уровня» которой позволяет получать оценку сходимости.

Рассмотрим первый подход применительно к системе с запаздыванием (6).

Пусть дополнительно функции $F_j(x_j)$, $j = \overline{1,n}$ удовлетворяют условиям Липшица с постоянными L_{ij}, для каждого уравнения $i = \overline{1,n}$ системы (6).

Теорема 3. Пусть существуют постоянные $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$,…, h_{nn}, при которых выполняются условия

$$2a_{11} > l_1 + R,\ 2a_{22} > l_2 + R,\dots,\ 2a_{nn} > l_n + R,$$

$$l_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij},\ R = \sum_{j=1}^{n} h_{jj} L_j,\ L_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{L_{ij}}{h_{jj}}. \qquad (9)$$

Тогда нулевое положение равновесия системы с запаздыванием (6) будет устойчивым по Лялунову.

Доказательство. Для исследования устойчивости нулевого положения равновесия будем использовать функцию Ляпунова следующего вида

$$V(x_1, x_2,\dots,x_n) = \sum_{n=1}^{n} h_{ii} x_i^2.$$

При вычислении полной производной функции Ляпунова в силу системы (6) будем использовать условие Б.С. Разумихина. Для функции Ляпунова оно имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ii} x_{ii}^2(s) = V(x_1(s), x_2(s),\dots, x_n(s)) < V(x_1(t), x_2(t),\dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii} x_i^2(t)\,,\ s < t\,.$$

Отсюда следует, что

$$|x_i(s)| < \sqrt{\frac{1}{h_{ii}} \sum_{k=1}^{n} h_{kk} x_k^2(t)}\,,\ s < t\,,\ i = \overline{1,n}\,. \qquad (10)$$

Полная производная функции Ляпунова в силу системы (6) имеет вид

$$\frac{d}{dt} V(x_1(t), x_2(t),\dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} 2h_{ii} x_i(t) \left\{ -a_{ii} x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(x_j(t - \tau_{ij})) \right\}.$$

Используя условия Липшица, получаем

$$\frac{d}{dt} V(x_1(t), x_2(t),\dots, x_n(t)) \le -2\sum_{i=1}^{n} a_{ii} h_{ii} x_{ii}^2(t) + 2\sum_{i=1}^{n} h_{ii} x_i(t) \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \left| x_j(t - \tau_{ij}) \right|.$$

Отдельно рассмотрим вторую сумму

$$S_2 = 2\sum_{i=1}^{n} h_{ii} x_i(t) \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \left| x_j(t - \tau_{ij}) \right| =$$

$$= 2h_{11}|x_1(t)| [L_{11}|x_1(t - \tau_{11})| + L_{12}|x_2(t - \tau_{12})| + \dots + L_{1n}|x_n(t - \tau_{1n})|] +$$
$$+ 2h_{22}|x_2(t)| [L_{21}|x_1(t - \tau_{21})| + L_{22}|x_2(t - \tau_{22})| + \dots + L_{2n}|x_n(t - \tau_{2n})|] + \dots$$
$$+ 2h_{nn}|x_n(t)| [L_{n1}|x_1(t - \tau_{n1})| + L_{n2}|x_2(t - \tau_{n2})| + \dots + L_{nn}|x_n(t - \tau_{nn})|].$$

Используя условие (10) и неравенство $2AB \le (A^2 + B^2)$, оценим вторую сумму следующим образом

$$S_2 \le h_{11} \left\{ L_{11} \left[x_1^2(t) + \frac{h_{11}x_1^2(t) + h_{22}x_2^2(t) + \dots + h_{nn}^2(t)}{h_{11}} \right] + L_{12} \left[x_1^2(t) + \frac{h_{11}x_1^2(t) + h_{22}x_2^2(t) + \dots + h_{nn}x_n^2(t)}{h_{22}} \right] + \right.$$

$$\left. \dots + L_{1n} \left[x_1^2(t) + \frac{h_{11}x_1^2(t) + h_{22}x_2^2(t) + \dots + h_{nn}x_n^2(t)}{h_{nn}} \right] \right\} + h_{22} \left\{ L_{21} \left[x_2^2(t) + \frac{h_{11}x_1^2(t) + h_{22}x_2^2(t) + \dots + h_{nn}^2(t)}{h_{11}} \right] + \right.$$

$$+ L_{22} \left[x_2^2(t) + \frac{h_{11}x_1^2(t) + h_{22}x_2^2(t) + \dots + h_{nn}x_n^2(t)}{h_{22}} \right] + \dots$$

$$\left. \dots + L_{2n} \left[x_2^2(t) + \frac{h_{11}x_1^2(t) + h_{22}x_2^2(t) + \dots + h_{nn}x_n^2(t)}{h_{nn}} \right] \right\} +$$

$$+ h_{nn} \left\{ L_{n1} \left[x_n^2(t) + \frac{h_{11}x_1^2(t) + h_{22}x_2^2(t) + \dots + h_{nn}^2(t)}{h_{11}} \right] + L_{n2} \left[x_n^2(t) + \frac{h_{11}x_1^2(t) + h_{22}x_2^2(t) + \dots + h_{nn}x_n^2(t)}{h_{22}} \right] + \dots \right.$$

$$\left. \dots + L_{nn} \left[x_n^2(t) + \frac{h_{11}x_1^2(t) + h_{22}x_2^2(t) + \dots + h_{nn}x_n^2(t)}{h_{nn}} \right] \right\}.$$

Далее получаем

$$S_2 \le h_{11} \left\{ (L_{11} + L_{12} + \dots + L_{1n}) x_1^2(t) + h_{11} \left[\frac{L_{11}}{h_{11}} + \frac{L_{12}}{h_{22}} + \dots + \frac{L_{1n}}{h_{nn}} \right] x_1^2(t) + h_{22} \left[\frac{L_{11}}{h_{11}} + \frac{L_{12}}{h_{22}} + \dots + \frac{L_{1n}}{h_{nn}} \right] x_2^2(t) + \dots \right.$$

$$\left. + h_{nn} \left[\frac{L_{11}}{h_{11}} + \frac{L_{12}}{h_{22}} + \dots + \frac{L_{1n}}{h_{nn}} \right] x_n^2(t) \right\} + h_{22} \left\{ (L_{21} + L_{22} + \dots + L_{2n}) x_2^2(t) + h_{11} \left[\frac{L_{21}}{h_{11}} + \frac{L_{22}}{h_{22}} + \dots + \frac{L_{2n}}{h_{hh}} \right] x_1^2(t) + \right.$$

$$+h_{22}\left[\frac{L_{21}}{h_{11}}+\frac{L_{22}}{h_{22}}+\ldots+\frac{L_{2n}}{h_{nn}}\right]x_2^2(t)+\ldots\ \ldots+h_{nn}\left[\frac{L_{21}}{h_{11}}+\frac{L_{22}}{h_{22}}+\ldots+\frac{L_{2n}}{h_{nn}}\right]x_n^2(t)\Bigg\}+\ldots$$

$$+h_{nn}\Bigg\{(L_{n1}+L_{n2}+\ldots+L_{nn})x_n^2(t)+h_{11}\left[\frac{L_{n1}}{h_{11}}+\frac{L_{n2}}{h_{22}}+\ldots+\frac{L_{nn}}{h_{hh}}\right]x_1^2(t)+$$

$$+h_{22}\left[\frac{L_{n1}}{h_{11}}+\frac{L_{n2}}{h_{22}}+\ldots+\frac{L_{nn}}{h_{nn}}\right]x_2^2(t)+\ldots\ \ldots+h_{nn}\left[\frac{L_{n1}}{h_{11}}+\frac{L_{n2}}{h_{22}}+\ldots+\frac{L_{nn}}{h_{nn}}\right]x_n^2(t)\Bigg\}.$$

Используя обозначения (9), получаем

$$S_2\le h_{11}\{l_1x_1^2(t)+h_{11}L_1x_1^2(t)+h_{22}L_1x_2^2(t)+\ldots+h_{nn}L_1x_n^2(t)\}+$$
$$+h_{22}\{l_2x_2^2(t)+h_{11}L_2x_1^2(t)+h_{22}L_2x_2^2(t)+\ldots+h_{nn}L_2x_n^2(t)\}+\ldots$$
$$\ldots+h_{nn}\{l_nx_n^2(t)+h_{11}L_nx_1^2(t)+h_{22}L_nx_2^2(t)+\ldots+h_{nn}L_nx_n^2(t)\}.$$

И для полной производной будет выполняться

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))\le-2(a_{11}h_{11}x_1^2(t)+a_{22}h_{22}x_2^2(t)+\ldots+a_{nn}h_{nn}x_n^2(t))+$$
$$+h_{11}[l_1+(h_{11}L_1+h_{22}L_2+\ldots+h_{nn}L_n)]x_1^2(t)+h_{22}[l_2+(h_{11}L_1+h_{22}L_2+\ldots+h_{nn}L_n)]x_2^2(t)+\ldots$$
$$\ldots+h_{nn}[l_n+(h_{11}L_1+h_{22}L_2+\ldots+h_{nn}L_n)]x_n^2(t).$$

И условием отрицательной определенности полной производной функции Ляпунова, а, следовательно, и условием асимптотической устойчивости, с учетом ранее принятых обозначений, является выполнение системы неравенств

$$2a_{11}h_{11}-h_{11}[l_1+R]>0,\quad 2a_{22}h_{22}-h_{22}[l_2+R]>0,\ldots,\ 2a_{nn}h_{nn}-h_{nn}[l_n+R]>0.$$

Можно получить менее «жесткие» условия устойчивости. Введем следующие обозначения

$$L_1=\frac{L_{11}}{\sqrt{h_{11}}}+\frac{L_{12}}{\sqrt{h_{22}}}+\ldots+\frac{L_{1n}}{\sqrt{h_{nn}}},\ L_2=\frac{L_{21}}{\sqrt{h_{11}}}+\frac{L_{22}}{\sqrt{h_{22}}}+\ldots+\frac{L_{2n}}{\sqrt{h_{nn}}},\ldots,$$

$$L_n=\frac{L_{n1}}{\sqrt{h_{11}}}+\frac{L_{n2}}{\sqrt{h_{22}}}+\ldots+\frac{L_{nn}}{\sqrt{h_{nn}}},\quad C=\{c_{ij}\},\ i,j=\overline{1,n},\qquad(11)$$

$$c_{11}=2h_{11}(a_{11}-L_1\sqrt{h_{11}}),\quad c_{12}=-\sqrt{h_{11}h_{22}}(L_1\sqrt{h_{11}}+L_2\sqrt{h_{22}}),\ldots,$$
$$c_{1n}=-\sqrt{h_{11}h_{nn}}(L_1\sqrt{h_{11}}+L_n\sqrt{h_{nn}}),$$
$$c_{22}=2h_{22}(a_{22}-L_2\sqrt{h_{22}}),\quad c_{23}=-\sqrt{h_{22}h_{33}}(L_2\sqrt{h_{22}}+L_3\sqrt{h_{33}}),\ldots,$$
$$c_{2n}=-\sqrt{h_{22}h_{nn}}(L_2\sqrt{h_{22}}+L_n\sqrt{h_{nn}}),\ldots,$$
$$c_{n-1,n-1}=2h_{n-1,n-1}(a_{n-1,n-1}-L_{n-1}\sqrt{h_{n-1,n-1}}),$$
$$c_{n-1,n}=-\sqrt{h_{n-1,n-1}h_{n,n}}(L_{n-1}\sqrt{h_{n-1,n-1}}+L_n\sqrt{h_{n,n}}),\quad c_{n,n}=2h_{nn}(a_{n,n}-L_n\sqrt{h_{n,n}}).$$

Имеют место следующие условия устойчивости.

Теорема 4. Пусть существуют постоянные $h_{11}>0$, $h_{22}>0,\ldots,$ $h_{nn}>0$, при которых матрица $C=\{c_{ij}\}$ положительно определенная. Тогда нулевое положение равновесия системы (6) является асимптотически устойчивым.

Доказательство. Для исследования устойчивости вновь будем использовать функцию Ляпунова вида суммы квадратичных форм. При вычислении полной производной функции Ляпунова в силу системы будем использовать условия типа Б.С. Разумихина в полученном выше виде (10). Как было показано ранее, полная производная функции Ляпунова имеет вид

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} 2h_{ii}x_i(t)\left\{-a_{ii}x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(x_j(t-\tau_{ij}))\right\}.$$

Используя условия Липшица, получаем

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)) \le -2\sum_{i=1}^{n} a_{11}h_{ii}x_{ii}^2(t) + 2\sum_{i=1}^{n} h_{ii}x_i(t\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\left|x_j(t-\tau_{ij})\right| = S_1 + S_2 .$$

Рассмотрим второе слагаемое S_2. С использованием введенных в условии теоремы 4 обозначений запишем

$$S_2 \le 2h_{11}x_1(t)L_1\{\sqrt{h_{11}}|x_1(t)| + \sqrt{h_{22}}|x_2(t)| + ... + \sqrt{h_{nn}}|x_n(t)|\} +$$
$$+ 2h_{22}x_2(t)L_2\{\sqrt{h_{11}}|x_1(t)| + \sqrt{h_{22}}|x_2(t)| + ... + \sqrt{h_{nn}}|x_n(t)|\} + ...$$
$$+ 2h_{nn}x_n(t)L_n\{\sqrt{h_{11}}|x_1(t)| + \sqrt{h_{22}}|x_2(t)| + ... + \sqrt{h_{nn}}|x_n(t)|\} .$$

Перегруппировав квадратичные члены, получим

$$S_2 \le 2h_{11}L_1\sqrt{h_{11}}x_1^2(t) + 2(h_{11}L_1\sqrt{h_{22}} + h_{22}L_2\sqrt{h_{11}})|x_1(t)||x_2(t)| +$$
$$+ 2(h_{11}L_1\sqrt{h_{33}} + h_{33}L_3\sqrt{h_{11}})|x_1(t)||x_3(t)| + ... + 2(h_{11}L_1\sqrt{h_{nn}} + h_{nn}L_{nn}\sqrt{h_{11}})|x_1(t)||x_n(t)| +$$
$$+ 2h_{22}L_2\sqrt{h_{22}}x_2^2(t) + 2(h_{22}L_2\sqrt{h_{33}} + h_{33}L_3\sqrt{h_{22}})|x_2(t)||x_3(t)| + ...$$
$$+ 2(h_{22}L_2\sqrt{h_{nn}} + h_{nn}L_n\sqrt{h_{22}})|x_2(t)||x_n(t)| + ...$$
$$+ 2h_{n-1,n-1}L_{n-1}\sqrt{h_{n-1,n-1}}x_{n-1}^2(t) + 2(h_{n-1,n-1}L_{n-1}\sqrt{h_{n,n}} + h_{n,n}L_n\sqrt{h_{n-1,n-2}})|x_{n-1}(t)||x_n(t)| +$$
$$+ 2h_{n,n}L_n\sqrt{h_{n,n}}x_n^2(t) .$$

Преобразуем полученное выражение следующим образом

$$S_2 \le 2h_{11}L_1\sqrt{h_{11}}x_1^2(t) + 2\sqrt{h_{11}h_{22}}(L_1\sqrt{h_{11}} + L_2\sqrt{h_{22}})|x_1(t)||x_2(t)| +$$
$$+ 2\sqrt{h_{11}h_{33}}(L_1\sqrt{h_{11}} + L_3\sqrt{h_{33}})|x_1(t)||x_3(t)| + ... + 2\sqrt{h_{11}h_{nn}}(L_1\sqrt{h_{11}} + L_n\sqrt{h_{nn}})|x_1(t)||x_n(t)| +$$
$$+ 2h_{22}L_2\sqrt{h_{22}}x_2^2(t) + 2\sqrt{h_{22}h_{33}}(L_2\sqrt{h_{22}} + L_3\sqrt{h_{33}})|x_2(t)||x_3(t)| + ...$$
$$+ 2\sqrt{h_{22}h_{nn}}(L_2\sqrt{h_{22}} + L_{nn}\sqrt{h_{nn}})|x_2(t)||x_n(t)| + ...$$
$$+ 2h_{n-1,n-1}L_{n-1}\sqrt{h_{n-1,n-1}}x_{n-1}^2(t) + 2\sqrt{h_{n-1,n-1}h_{nn}}(L_{n-1}\sqrt{h_{n,n}} + L_n\sqrt{h_{n-1,n-1}})|x_{n-1}(t)||x_n(t)| +$$
$$+ 2h_{n,n}L_n\sqrt{h_{n,n}}x_n^2(t) .$$

Окончательно с учетом введенных обозначений для полной производной функции Ляпунова в силу системы с запаздыванием (4) будет иметь место неравенство

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)) \le -(|x_1(t|,|x_2(t)|,...,|x_n(t|)C(|x_1(t)|,|x_2(t)|,...,|x_n(t)|^T .$$

И условием устойчивости является положительная определенность матрицы C.

Заключение

Рассмотрены системы дифференциальных уравнений с выделенной отрицательной диагональной частью и нелинейностью специального вида. Такие системы встречаются при исследовании динамики нейронных сетей. Получены условия асимптотической устойчивости положения равновесия. Рассмотрены также системы с запаздыванием аргумента. Исследования устойчивости проведены с использованием функционалов Ляпунова-Крассовского. Благодаря подходу (LMI), все условия имеют вид конструктивно проверяемых матричных неравенств. Аналогичные результаты в случае запаздывания аргумента также можно получить,

используя подход конечномерных функций Ляпунова с дополнительными условиями типа Разумихина.

Acknowledgment

The second and the fourth authors were supported by the Grant FEKT-S-17-4225 of Faculty of Electrical Engineering and Communication, Brno University of Technology.

Литература

1. Амосов Н.М. Алгоритмы разума. – Киев, Наукова думка. – 1985. (Глушков В.М. - ВА 145)
2. McCulloch W.S., Pitts W. "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity" // Bulletin of Mathematica1 Biophysics, 1943, vol. 5, p. 115-133.
3. Мак-Каллок У., Питтс В. Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности. – В сб. Галушкина А.И., Цыпкин Я.З. Нейронные сети: История развития теории, кн. 5. – М., ИПРЖР, 2001. – 840 с.
4. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс, 2-е издание, М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
5. Hopfield J.J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons // Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, 1984, vol. 81, p. 3088-3092.
6. Rall W. Cable theory for dendritic neurons. In Methods in Neuronal Modeling / C. Koch, I. Segev, eds., 1989, p. 9-62, Cambridge, MA: MIT Press.
7. Gopalsamy K. Leakage Delays in BAM // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 325 (2007), pp. 1117-1132.
8. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. Introduction to the theory of the differential equations with deviating argument. – Academic Press, New York, 1973.
9. Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Б.С. Разумихин. - Прикладная математика и механика, Т.20, № 4, 1956. - С.500-512.

Literatura

1. Amosov N.M. Algoritmy razuma. – Kiev, Naukova dumka. – 1985. (Glushkov V.M. - BA 145)
2. McCulloch W.S., Pitts W. "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity" // Bulletin of Mathematica1 Biophysics, 1943, vol. 5, p. 115-133.
3. McCulloch W.S., Pitts W. Logicheskoe ischislenie idey, otnosyschihsya k nervnoy aktivnosti. – V sb. Galushkina A.I., Tsypkin Ya.Z. Neyronniye seti: Istoriya razvitiya teorii, kn. 5. – M., IPRZhR, 2001. – 840 s.
4. Haykin S. Neyronnie seti:polniy kurs, 2 izdanie, M.: Izdatelskiy dom «Wilyams», 2006. – 1104 s.
5. Hopfield J.J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons // Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, 1984, vol. 81, p. 3088-3092.
6. Rall W. Cable theory for dendritic neurons. In Methods in Neuronal Modeling, C. Koch and I. Segev, eds., 1989, p. 9-62, Cambridge, MA: MIT Press.
7. Gopalsamy K. Leakage Delays in BAM // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 325 (2007), pp. 1117-1132.
8. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. Introduction to the theory of the differential equations with deviating argument. – Academic Press, New York, 1973.
9. Razumikhin B.S. Ob ustoychivosti system s zapazdivaniem // B.S. Razumikhin – Prikladnaya matematika i mechanica, V.20, №4, 1956. – S. 500-512.

RESUME

A.V. Shatyrko, **J. Diblik**, **D.Ya. Khusainov**, **J. Bashtinec**

The convergence of neurodynamics processes in the Hopfield model

In this paper, Hopfield neural networks with feedback are considered. Their dynamics is described by a system of ordinary differential equations, and also by a system of functionall-differential equations with a time delay argument. As a method of investigation, the direct Lyapunov method is chosen. The aim of the study is to establish the fact of asymptotic stability of solutions. First, we consider a network described by a system of ordinary differential equations with a distinguished stable linear part and an additively entering weak nonlinearity of a special form. Using the Lyapunov function in the form of the quadratic form plus the an integral of nonlinearity, which is traditional for

systems of this kind, we prove a sufficient condition for asymptotic stability. Further, systems with delay argument are considered. This kind of systems is more suitable for describing the processes that occur in Hopfield networks. It is noted that, within the framework of the direct Lyapunov method, there are two approaches to investigating systems with delay argument: functional in infinite-dimensional spaces; and the method of functions using additional conditions, which allows us to carry out research in finite-dimensional spaces. Using these two approaches, applying the Lyapunov-Krasovskii functional containing the integral of terms with delay argument, and also the Lyapunov function of quadratic form plus additional conditions such as Razumikhin, a number of sufficient conditions for the asymptotic stability of the solutions of the considering systems are formulated and proved. All conditions are obtained in the form of easily verifiable matrix inequalities (the so-called LMI approach). This fact reinforces the applied constructiveness of the results.

Надійшла до редакції 25.10.2017